EPFL

Ens. : Stefano Francesco Burzio
MATH-189 Mathématiques - AR
17 janvier 2023
Durée : 180 minutes

1

Leonhard Euler

SCIPER : **111111**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- Un **formulaire** personnel de 2 feuilles A4 recto-verso est autorisé.
- L'utilisation du livre **Formulaires et tables, CRM éditions** est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** non graphique et non programmable est autorisé.
- L'utilisation de tout autre **outil électronique** est interdite pendant l'épreuve.
- **Aucun** autre document n'est autorisé.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  $+1$ points si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  -0.2 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 Soit d la droite passant par les points $A\big(\frac{1}{e}, 1\big)$ et $B\big(1, \frac{1}{e}\big)$. Alors :

- ☐ La droite d coupe l'axe Ox dans le point $P\big(-1-\frac{1}{e}, 0\big)$
- ☐ La droite d coupe l'axe Oy dans le point $P\big(1+\frac{1}{e}, 0\big)$
- ☐ La droite d coupe l'axe Ox dans le point $P\big(1+\frac{1}{e}, 0\big)$
- ☐ La droite d coupe l'axe Oy dans le point $P\big(-1-\frac{1}{e}, 0\big)$

Question 2 Soit $\vec{u} = (-1, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$ et $\vec{w} = (1, 0, -1)$ trois vecteurs. Veuillez sélectionner l'affirmation correcte.

- ☐ L'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\sqrt{3}$
- ☐ Le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est 2
- ☐ L'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{w}$ est 2
- ☐ Le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est 1

Question 3 Soient $a, b, x \in \mathbb{R}$ tels que $a > 1$, $b > 1$ et $x > 1$. Si $\log_a(ab) = x$ alors l'expression $\log_b(ab)$ vaut

- ☐ $\frac{x}{x-1}$
- ☐ $\frac{x+1}{x-1}$
- ☐ $\frac{x}{x+1}$
- ☐ $\frac{1}{x}$

Question 4 L'intersection de deux paraboloïdes de révolution S_1 et S_2 avec équations explicites donnée respectivement par :

$$S_1 \ : \ z = x^2 + y^2 + 2 \qquad \text{et} \qquad S_2 \ : \ z = -x^2 - y^2 + 2$$

est

- ☐ un plan
- ☐ une parabole
- ☐ un point
- ☐ une circonférence

Question 5 On considère le triangle curviligne dont les côtés sont les axes Ox, Oy et la parabole d'équation $y(x) = (x-2)^2$. La droite l'horizontale qui le coupe le triangle en deux parties d'aires égales a équation

- ☐ $y = \sqrt{3} - 1$
- ☐ $y = 1$
- ☐ $y = \frac{1}{2}$
- ☐ $y = 2$

Question 6 Considérons le segment AB reliant les points $A(1,1,1)$ et $B(-1,-1,1)$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$. Considérons le cercle Γ centré en $O(0,0,0)$ de rayon 1 qui se trouve dans le plan Oxy. Soit $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation du segment AB telle que $\alpha(0) = A$ et $\alpha(1) = B$. Soit $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation su cercle Γ telle que $\beta(0) = \beta(1) = (1,0,0)$. Une représentation paramétrique de la surface réglée engendrée par les courbes α et β est :

- ☐ $r(s,t) = \big((1-s)(1-2t) + s\cos(2\pi t),\ (1-s)(1-2t),\ 1-s+s\sin(2\pi t)\big)$ avec $s \in \mathbb{R}$ et $0 \le t \le 1$
- ☐ $r(s,t) = \big(s(1+2t) + (1-s)\cos(2\pi t),\ s(1+2t) + (1-s)\sin(2\pi t),\ s\big)$ avec $s \in \mathbb{R}$ et $0 \le t \le 1$
- ☐ $r(s,t) = \big((1-s)(1+2t) + s\cos(2\pi t),\ (1-s)(1+2t),\ 1-s+s\sin(2\pi t)\big)$ avec $s \in \mathbb{R}$ et $0 \le t \le 1$
- ☐ $r(s,t) = \big((1-s)(1-2t) + s\cos(2\pi t),\ (1-s)(1-2t) + s\sin(2\pi t),\ 1-s\big)$ avec $s \in \mathbb{R}$ et $0 \le t \le 1$

Question 7 L'intégrale indéfinie

$$\int \ln^2(x)\, dx$$

vaut

- ☐ $x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $2x\ln(x) - 2x\ln(x) + 2x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $2x\ln(x) + 2x\ln(x) - 2x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $x\ln^2(x) + 2x\ln(x) - 2x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

Question 8 Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq 0$ et $a \neq 1$. Le polynôme d'interpolation $P(x)$ passant par les points $(0,a)$, $(1,a^2)$, $(2,a^3)$ et $(3,a^4)$ est

- ☐ $P(x) = a + ax(a-1) + \frac{1}{2}x(a^3+a)(x-1) + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)(a^4+a^3+a^2+a)$
- ☐ $P(x) = a + ax(a-1) + \frac{1}{2}ax(a+1)^2(x-1) + \frac{1}{6}ax(a+1)^3(x-1)(x-2)$
- ☐ $P(x) = a + ax(a-1) + \frac{1}{2}x(a^3-a)(x-1) + \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)(a^4+a^3-a^2+a)$
- ☐ $P(x) = a + ax(a-1) + \frac{1}{2}ax(a-1)^2(x-1) + \frac{1}{6}ax(a-1)^3(x-1)(x-2)$

Question 9 Soit $x \in]-1,1[$. L'expression $\dfrac{1}{\cot(\arccos(x))}$ vaut

- ☐ $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- ☐ $\sqrt{1-x^2}$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Question 10 L'équation de la tangente à la courbe définie par $y(x) = e^{x\sin(x)}$ au point $P = (\pi, 1)$ est

- ☐ $y(x) = x - \pi + 1$
- ☐ $y(x) = -\pi x + \pi^2 + 1$
- ☐ $y(x) = \pi x - \pi^2 + 1$
- ☐ $y(x) = 1$

Question 11 Le cercle centré en $C(2, 0, e)$ de rayon 5 appartenant au plan Oxz admet comme paramétrisation :

- ☐ $(2 + 5\cos(\theta),\ 0,\ e + 5\sin(\theta))$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $(2 + 5\cos(\theta),\ e + 5\sin(\theta),\ 0)$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $(2 + \sqrt{5}\cos(\theta),\ e + \sqrt{5}\sin(\theta),\ 0)$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$
- ☐ $(-2 + 5\cos(\theta),\ 0,\ -e + 5\sin(\theta))$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Question 12 On considère un point $P_0(2a, 0)$ sur l'axe Ox et un point $P_1(0, 10 - 2a)$ sur l'axe Oy, où $a \in \mathbb{R}$. L'enveloppe de la famille de droites passant par P_0 et P_1 est donnée par :

- ☐ $x(a) = \dfrac{5}{2a^2}$ et $y(a) = a^2 - a + 2$
- ☐ $x(a) = \dfrac{a^2}{10}$ et $y(a) = \dfrac{a^2}{40} - a + 10$
- ☐ $x(a) = \dfrac{5}{2a^2}$ et $y(a) = \dfrac{5}{8a^2} - \dfrac{5}{4a^3} + 10 - \dfrac{a}{2}$
- ☐ $x(a) = \dfrac{2}{5}a^2$ et $y(a) = \dfrac{2}{5}a^2 - 4a + 10$

Question 13 Soit π le plan passant par $A(1, 1, 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (1, -1, 1)$. Veuillez sélectionner l'affirmation correcte.

- ☐ Le point $P(4, 2, -1)$ appartient au plan π
- ☐ L'équation cartésienne du plan π est $x - y + z = 0$
- ☐ La droite de représentation paramétrique $\gamma(t) = (1 + t, -2 - 3t, 6 - t)$ où $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan π
- ☐ Une représentation paramétrique du plan π est $r(t, s) = (3 + t - s, t, s)$ où $t, s \in \mathbb{R}$

Question 14 L'aire latérale de la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe

$$\gamma(t) = (t^3, 0, t) \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

autour de l'axe Oz, pour t allant de 0 à 1 vaut

- ☐ $\dfrac{\pi}{27}(10^{3/2} - 1)$
- ☐ $\dfrac{\pi}{54}(2^{3/2} - 1)$
- ☐ $\dfrac{4\pi}{3}(2^{3/2} - 1)$
- ☐ $\dfrac{\pi}{18}(10^{3/2} - 1)$

Question 15 La dérivée de la fonction $f(x) = \ln(\sinh(x)) - \sinh(\ln(x))$ en $x = \ln(2)$ vaut

- ☐ $f'(\ln(2)) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{2\ln(4)}$
- ☐ $f'(\ln(2)) = \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{2\ln^2(2)}$
- ☐ $f'(\ln(2)) = \dfrac{7}{6} - \dfrac{1}{2\ln(4)}$
- ☐ $f'(\ln(2)) = \dfrac{7}{6} - \dfrac{1}{2\ln^2(2)}$

Question 16 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. L'expression $\sinh(x)\cosh(y)$ vaut

- ☐ $\sinh(x+y) + \sinh(x-y)$
- ☐ $\frac{1}{2}(\sinh(x+y) + \sinh(x-y))$
- ☐ $\frac{1}{4}(\sinh(xy) - \sinh(-xy))$
- ☐ $\frac{1}{2}\sinh(xy)$

Question 17 La longueur d'arc de la courbe définie par la fonction $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{1}{2x}$ entre le point $(1, \frac{2}{3})$ et le point $(2, \frac{19}{12})$ vaut

- ☐ $\dfrac{11}{12}$
- ☐ $\dfrac{7}{12}$
- ☐ $\dfrac{5}{12}$
- ☐ $\dfrac{17}{12}$

Question 18 La surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe

$$\gamma(t) = (1, t, t^2) \qquad t \in \mathbb{R}$$

autour de l'axe Oz admet comme paramétrisation :

- ☐ $(\sqrt{1+t^2}\cos(\alpha), \sqrt{1+t^2}\sin(\alpha), t^3)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \alpha \leq 2\pi$
- ☐ $(\sqrt{t+t^2}\cos(\alpha), \sqrt{t+t^2}\sin(\alpha), t^4)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \alpha \leq 2\pi$
- ☐ $(\sqrt{1+t}\cos(\alpha), \sqrt{1+t}\sin(\alpha), t^2)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \alpha \leq 2\pi$
- ☐ $(\sqrt{1+t^2}\cos(\alpha), \sqrt{1+t^2}\sin(\alpha), t^2)$, avec $t \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

Question 19 Quel est le polynôme de Taylor à l'ordre 4 de la fonction $f(x) = 2e^x - \cos(x)$ autour de 0 ?

- ☐ $3 + 2x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{8}$
- ☐ $x + x^2 + \dfrac{x^3}{6}$
- ☐ $1 + 2x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{24}$
- ☐ $3 + 2x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{8}$

Question 20 On considère la courbe γ définie par $f(x) = \cosh(x)$. La développante de la courbe γ en $P = (0, 1)$ est la courbe représentée par la paramétrisation :

- ☐ $x(a) = a - \dfrac{\sinh(a) - 1}{\cosh(a)}$ et $y(a) = \cosh(a) - \tanh(a)(\sinh(a) - 1)$ où $a \in \mathbb{R}$
- ☐ $x(a) = a - \tanh(a)$ et $y(a) = \dfrac{1}{\cosh(a)}$ où $a \in \mathbb{R}$
- ☐ $x(a) = a + \dfrac{\sinh(a) - 1}{\cosh(a)}$ et $y(a) = \cosh(a) + \tanh(a)(\sinh(a) - 1)$ où $a \in \mathbb{R}$
- ☐ $x(a) = a + \tanh(a)$ et $y(a) = \cosh(a) + \tanh(a)\sinh(a)$ où $a \in \mathbb{R}$

Question 21 Soit γ la courbe de Bézier quadratique ayant comme points de contrôle $P_0 = (0,1)$, $P_1 = (-1,4)$, $P_2 = (-2,-2)$. La paramétrisation de la courbe γ est :

- ☐ $\gamma(t) = (-2t, 1+8t-11t^2)$, où $t \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\gamma(t) = (2t, 1+8t-t^2)$, où $t \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\gamma(t) = (2t-4t^2, 1-8t+5t^2)$, où $t \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\gamma(t) = (-2t, 1+6t-9t^2)$, où $t \in \mathbb{R}$.

Question 22 La fonction $g(x) = \arctan(x^3) + \arctan^3(x)$

- ☐ est croissante sur $\mathbb{R}$
- ☐ est décroissante sur $]0,+\infty[$ et croissante sur $]-\infty,0[$
- ☐ est décroissante sur $\mathbb{R}$
- ☐ est croissante sur $]0,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,0[$

Question 23 L'aire de la région délimité par l'axe Ox, la courbe représenté par $f(x) = \sin(x)e^{\cos(x)}$ et les droites verticales $x = 0$ et $x = \pi$ vaut

- ☐ $-e - \frac{1}{e}$
- ☐ $e - \frac{1}{e}$
- ☐ $\frac{1}{e} - e$
- ☐ $e + \frac{1}{e}$

Question 24 Parmi les surfaces suivantes, choisissez celle qui est à la fois une surface de révolution et une surface réglée.

- ☐ Une sphère
- ☐ Un oloïde
- ☐ Un hyperboloïde à une nappe
- ☐ Un paraboloïde hyperbolique

Question 25 Dans le plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On suppose que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et que l'angle entre ces deux vecteurs est $\frac{\pi}{3}$. Quelle est la norme du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$?

- ☐ $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{25+12\sqrt{3}}$
- ☐ $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 7$
- ☐ $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 5+\sqrt{12}$
- ☐ $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{37}$

Question 26 On considère la courbe $\mathcal{C}$ donnée sous forme paramétrique par

$$\gamma(t) = \left(t^2, \frac{1}{3}t^3 + 1\right) \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

Le cercle osculateur de la courbe $\mathcal{C}$ au point $t = 1$ à équation cartésienne

- ☐ $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{19}{3}\right)^2 = \frac{125}{4}$
- ☐ $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{17}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{125}}{2}$
- ☐ $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{17}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{125}}{2}$
- ☐ $\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{19}{3}\right)^2 = \frac{125}{4}$

Question 27 L'expression $\log_2(3)\cdot\log_3(4)\cdot\log_4(5)\cdot\ldots\cdot\log_{1023}(1024)$ vaut

- ☐ $\ln(2)$
- ☐ $\ln(1024)$
- ☐ 1
- ☐ 10

Question 28 L'intégrale définie

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$$

vaut

- ☐ $2\sin(\sqrt{\pi})$
- ☐ 2
- ☐ $2\sin(\sqrt{\pi})+2$
- ☐ 0

Question 29 Soit θ un angle dans le premier quadrant, c'est-à-dire $\theta\in]0,\pi/2[$, tel que $\cos(\theta)=\frac{\sqrt{8}}{3}$. Alors

- ☐ $\cot(\theta)=\sqrt{8}$
- ☐ $\tan(\theta)=\frac{3}{\sqrt{8}}$
- ☐ $\sec(\theta)=3$
- ☐ $\sin(\theta)=-\frac{1}{3}$

Question 30 Soit n et k deux nombres entiers tels que $1\le k<n$. Le nombre entier

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

est égal à

- ☐ $\binom{n}{k-1}$
- ☐ $\binom{n}{k}$
- ☐ $\binom{n+1}{k+1}$
- ☐ $\binom{n-1}{2k-1}$

Question 31 Soit $\mathcal{C}$ la courbe paramétrée par

$$\gamma(t)=(\sqrt[3]{\cos(t)},\,\sin^3(t),\,t)\qquad\text{où } t\in\mathbb{R}.$$

Le vecteur tangent à la courbe $\mathcal{C}$ au point $P=\left(\frac{1}{\sqrt[6]{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}\right)$ est

- ☐ $\left(\frac{8}{3},-\frac{3}{2},1\right)$
- ☐ $\left(\frac{1}{3\sqrt[6]{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}},1\right)$
- ☐ $\left(\frac{8}{3},\frac{3}{2},1\right)$
- ☐ $\left(-\frac{1}{3\sqrt[6]{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}},1\right)$

Question 32 Le volume engendré par la surface de révolution obtenue en faisant tourner la courbe

$$\gamma(t) = (\cosh(t), 0, t) \qquad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

autour de l'axe Oz, pour t allant de -4 à 4 vaut

- ☐ $4\pi + \dfrac{\pi}{2}\sinh(8)$
- ☐ $8\pi + \pi\sinh(4)$
- ☐ $\dfrac{\pi}{4}\cosh(4)$
- ☐ 0